Ex. 2.78

24 de novembro de 2020 13:37

2.78. Suponha que o peso de um pacote de farinha é uma variável aleatória que se admite ter valor médio 1 kg e desvio padrão 0.05 kg. Pretende-se arrumar 99 pacotes numa prateleira que suporta 100 kg. Qual o risco de a prateleira desabar? Justifique.

X_i V.A. PESO DO i-ÉSIMO PACOTE EM kg

com $\mu = E[X] = 1$, $\sigma = \sqrt{VAR[X]} = 0.05$

$S_{99} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{99}$

SUPONDO QUE $X_1, \ldots, X_{99}$ SÃO V.A. COM DISTRIBUIÇÃO IDÊNTICA E INDEPENDENTES (I.I.D.),

Teorema Limite Central

Sejam $X_1, \ldots, X_n$, v.a.'s independentes e identicamente distribuídas com valor médio μ e variância σ^2 (finita).

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tem-se, c/ n grande

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{e} \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

NOTA: CONSIDERA-SE n "GRANDE" QUANDO $n \geq 30$.

$S_{99} \sim N(\mu = 99 \times 1, \sigma = 0.05 \times \sqrt{99})$ E $Z = \frac{S_{99} - 99}{0.05 \times \sqrt{99}} \sim N(0,1)$

A PRATELEIRA DESABA QUANDO O PESO TOTAL ULTRAPASSA 100 kg, i.e. QUANDO $S_{99} > 100$.

$$P(S_{99} > 100) = P\left(\frac{S_{99} - 99}{0.05 \times \sqrt{99}} > \frac{100 - 99}{0.05 \times \sqrt{99}}\right) \simeq P(Z > 2.01) = 1 - \phi(2.01) = \underset{\text{TABELA}}{1 - 0.9777} = 0.0223$$

(100-99)/(0,05*SQRT(99))=2,010075630518424

$\phi(z)$

	0.00	0.01	0.02
0.0	0.50000	0.50399	0.50798
0.1	0.53983	0.54380	0.54776
0.2	0.57926	0.58317	0.58706
0.3	0.61791	0.62172	0.62552
0.4	0.65542	0.65910	0.66276
0.5	0.69146	0.69497	0.69847
0.6	0.72575	0.72907	0.73237
0.7	0.75804	0.76115	0.76424
0.8	0.78814	0.79103	0.79389
0.9	0.81594	0.81859	0.82121
1.0	0.84134	0.84375	0.84614
1.1	0.86433	0.86650	0.86864
1.2	0.88493	0.88686	0.88877
1.3	0.90320	0.90490	0.90658
1.4	0.91924	0.92073	0.92220
1.5	0.93319	0.93448	0.93574
1.6	0.94520	0.94630	0.94738
1.7	0.95543	0.95637	0.95728
1.8	0.96407	0.96485	0.96562
1.9	0.97128	0.97193	0.97257
2.0	0.97725	0.97778	0.97831
2.1	0.98214	0.98257	0.98300

PASSO 1 : REDUZIR (Z)
PASSO 2 : $P(Z \leq z) = \phi(z)$
PASSO 3 : TABELA

2.78. Suponha que o peso de um pacote de farinha é uma variável aleatória que se admite ter valor médio 1 kg e desvio padrão 0.05 kg. Pretende-se arrumar 99 pacotes numa prateleira que suporta 100 kg. Qual o risco de a prateleira desabar? Justifique.

$n = 99 \geq 30$ (É "GRANDE")

X_i V.A PESO DO i-ÉSIMO PACOTE EM kg

SABE-SE QUE $\mu = E[X_i] = 1$ E QUE $\sigma = \sqrt{VAR[X_i]} = 0.05$

PEDE-SE $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{99} > 100)$

SEJA $S = X_1 + \cdots + X_{99}$. PORTANTO, PEDE-SE $P(S > 100)$

Teorema Limite Central

Sejam $X_1, \ldots, X_n$, v.a.'s independentes e identicamente distribuídas com valor médio μ e variância σ^2 (finita).

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tem-se, c/ n grande ($n \geq 30$)

$$\boxed{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

SUPONDO QUE $X_1, \ldots, X_{99}$ TÊM A MESMA DISTRIBUIÇÃO E QUE SÃO V.A. INDEPENDENTES

ENTÃO PELO TLC $Z = \frac{S - 99 \times 1}{0.05 \times \sqrt{99}} \sim N(0,1)$

$$P(S > 100) = P\Big(\underbrace{\frac{S - 99}{0.05\sqrt{99}}}_{Z} > \underbrace{\frac{100 - 99}{0.05\sqrt{99}}}_{2.01}\Big) \simeq P(Z > 2.01)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.01) = 1 - \phi(2.01) = \underset{\text{TABELA}}{1 - 0.977} = 0.023$$